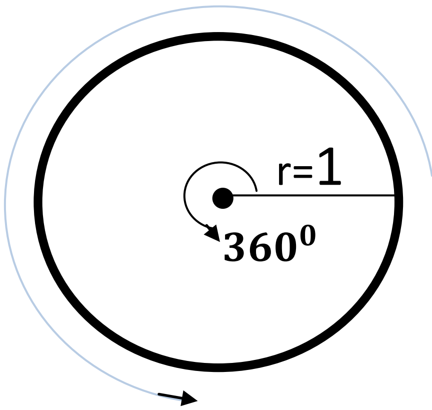
Тригонометр

Өнцгийг радионаар илэрхийлэх



Нэгж радиустай (r=1) тойрог авъя: с- тойргийн урт .

Энэ тойргийн урт $c = 2\pi r = 2\pi$

Нөгөө талаас тойргийн нумын эргэлтийн хэмжээ нь 360^0 тэнцүү байдаг. Иймд $2\pi = 360^0$ байна. $2\pi \approx 6.28$

$(2\pi \approx)6.28$ радион хэмжээ $= 360$ градус

Эндээс $\mathbf{1^0 = \frac{\pi}{180}}$; $\mathbf{1}$ радиан $= \frac{360^0}{6.28}$ байна.

Тэгвэл зарим нэг өнцгийг **радион хэмжээгээр илэрхийлвэл:** $\mathbf{180^0 = \pi}$;

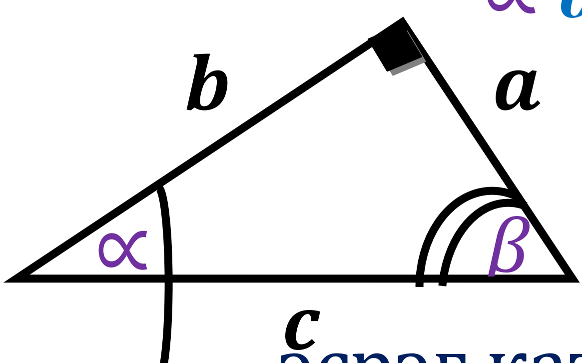
$\mathbf{90^0 = \frac{\pi}{2}; 60^0 = \frac{\pi}{3}; \ 45^0 = \frac{\pi}{4}; 30^0 = \frac{\pi}{6};}$.

<u>**Бодолго**</u>**:** $\mathbf{120^0, 135^0, 150^0, 210^0, 225^0, 240^0, 270^0,}$ $\mathbf{300^0, 315^0, 330^0}$ ***өнцгүүдийг*** радионаар илэрхиил.

Тригонометрийн функцүүд ба тэдгээрийн чанарууд, үндсэн адитгал

Тригнометрийн функцийг 10-р ангид үзсэн билээ. Энд $\sin\propto, \cos\propto, \mathrm{tg}\propto, \mathrm{ctg}\propto$ (синус, косинус, тангес, котангес) функцүүдийг байдаг.

Өмнө нь тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд тодорхойлвол: ***a,b- катет, c -гипотенуз***



∝ өнцгийн налсан катет a,

эсрэг катет b.

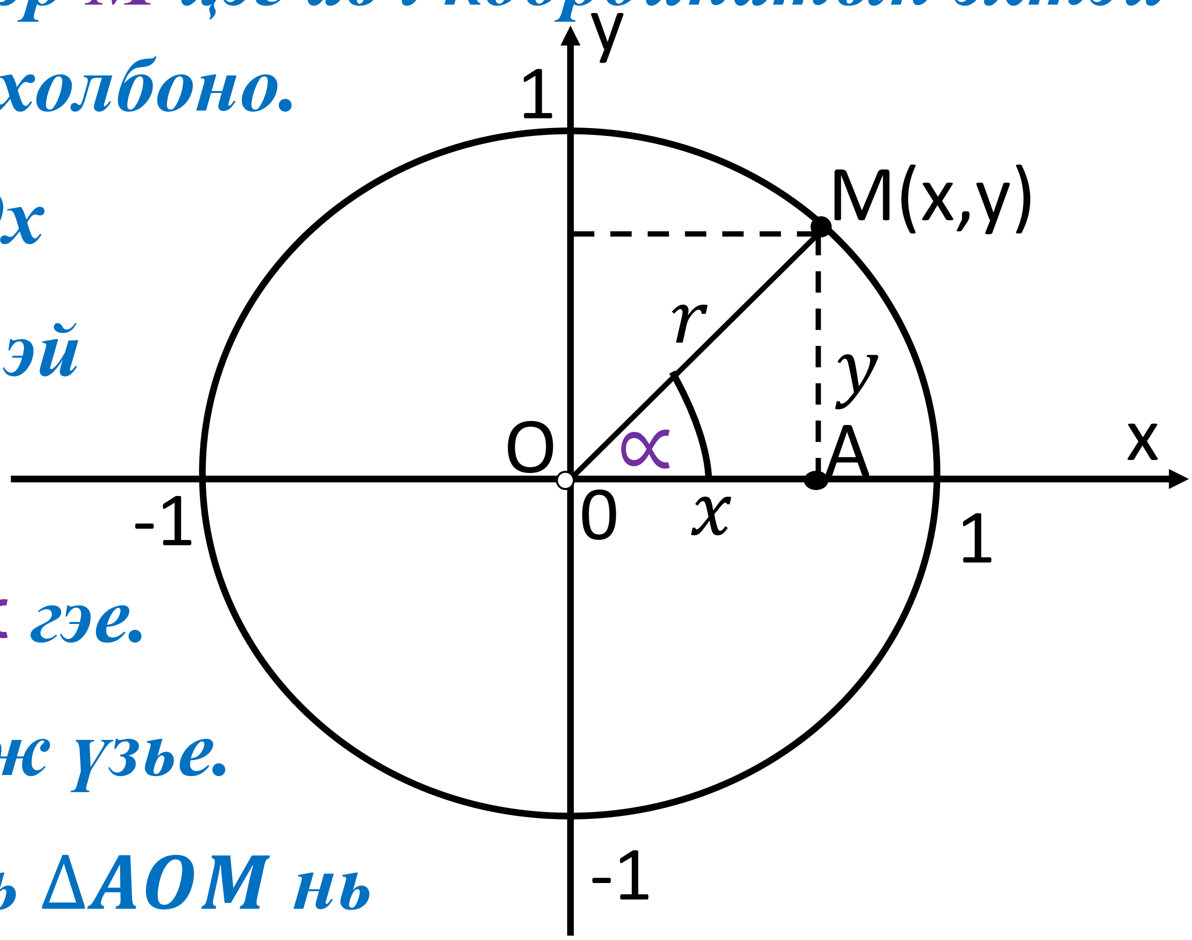
$$\sin\propto = \frac{\text{эсрэг катет}}{\text{гипотенуз}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\propto = \frac{\text{налсан катет}}{\text{гипотенуз}} = \frac{b}{c}$$

байдаг.

Одоо координатын эх дээр төвтэй нэгж радиустай (r =1) тойрог байгуулая.

Тойрог дээр М цэг авч координатын эхтэй хэрчмээр холбоно.



Хэрчим Ox тэнхлэгтэй үүсгэх өнцгийг ∝ гэе.

М(x;y)-гэж үзье.

Зураг дахь ΔAOM нь тэгш өнцөгт гурвалжин тул ∝ өнцгийн хувьд өнцгийн харьцаа бичвэл: r =1

{ ∝-ийн налсан катет OA=x, эсрэг катет нь AM= y болно.}

$$\sin \propto = \frac{\text{эсрэг катет}}{\text{гипотенуз}} = \frac{OA}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\propto = \frac{\text{налсан катет}}{\text{гипотенуз}} = \frac{AM}{r} = \frac{x}{1} = x$$

гэж гарна.

Эндээс $\begin{cases} x = \cos\propto \\ y = \sin\propto \end{cases}$ буюу $\begin{cases} \cos - \text{н утгыг } x \\ \sin - \text{н утгыг } y \end{cases}$

илэрхийлдэг байна.

Одоо sin∝; cos∝-ийн зарим өнцөг дээрх утгуудыг зураг ашиглан олье.

$$\sin 30^\circ = \frac{0.5}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{0.86}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{0.86}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

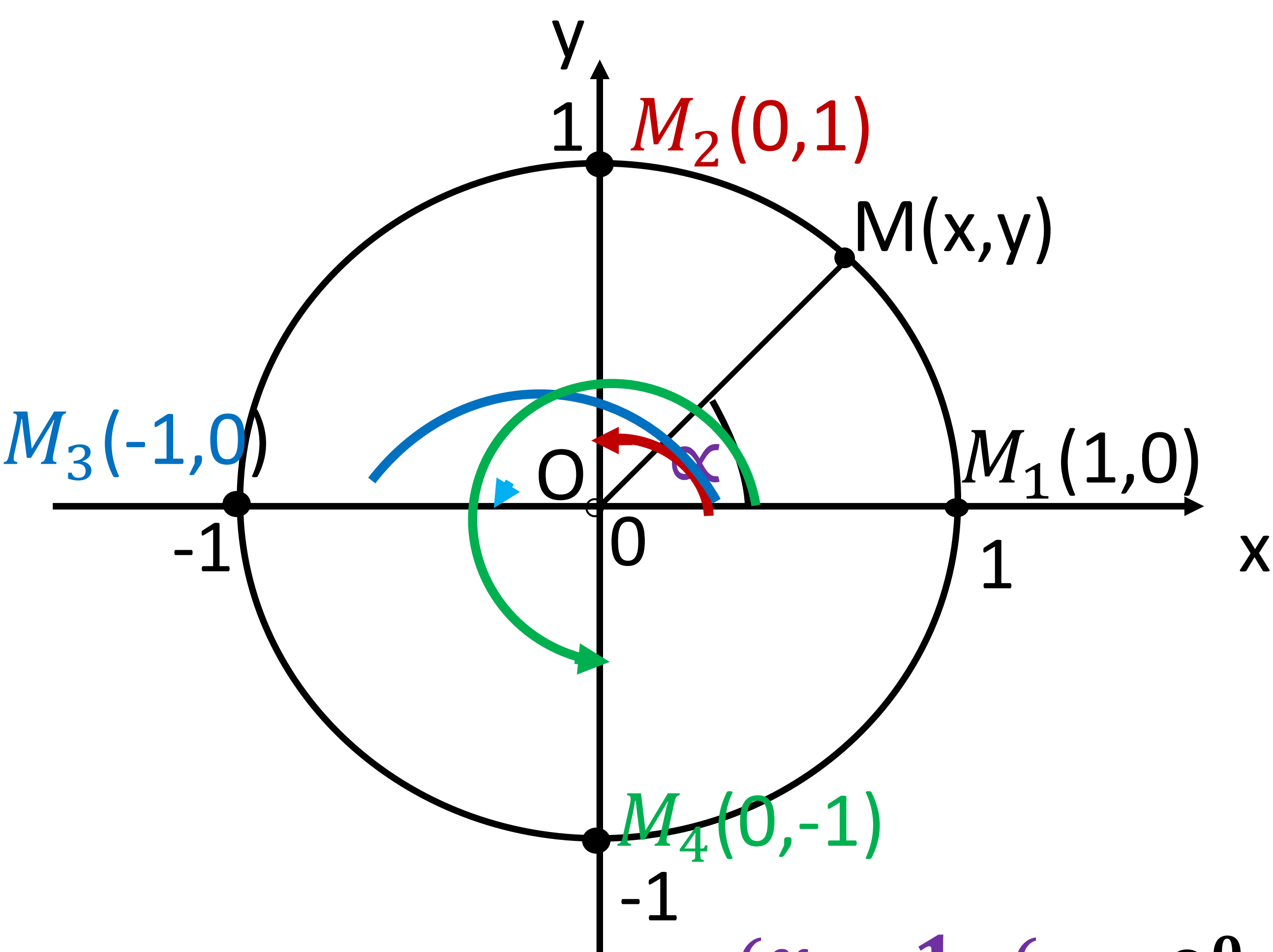
$$\cos 60^\circ = \frac{0.5}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 90^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos 90^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

Тэгвэл дараах зураг байгуулж

$\mathbf{0^0, 90^0, 180^0, 270^0}$ ***дээрх өнцгүүдийг авъя.***



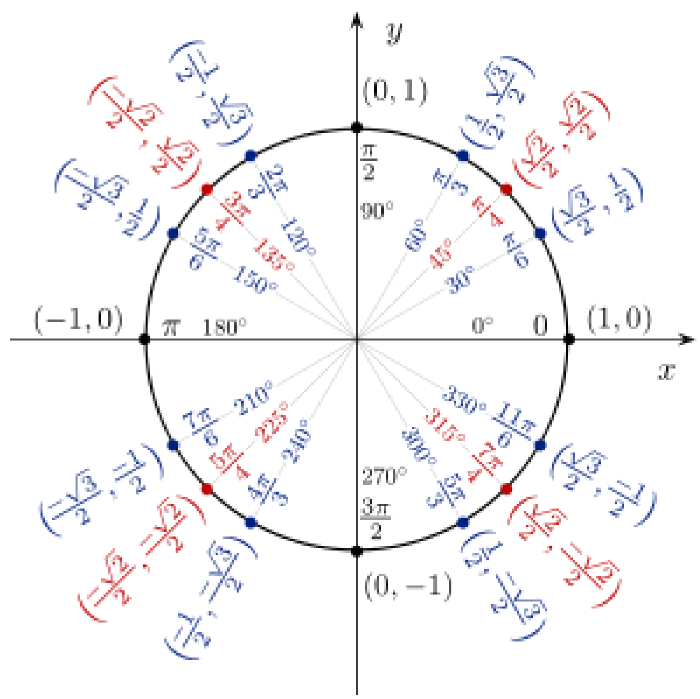
$\boldsymbol{M \equiv M_1}$ ***үед*** $\propto = \mathbf{0^0}$ ***ба*** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos 0^0 = 1 \\ \sin 0^0 = 0 \end{cases}$

$\boldsymbol{M \equiv M_2}$ ***үед*** $\propto = \mathbf{90^0}$***ба*** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos 90^0 = 0 \\ \sin 90^0 = 1 \end{cases}$

$\boldsymbol{M \equiv M_3}$ ***үед*** $\propto = \mathbf{180^0}$***ба*** $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos 180^0 = -1 \\ \sin 180^0 = 0 \end{cases}$

$$\boldsymbol{M \equiv M_4} \; \text{үед} \; \propto = 270^0 \; \text{ба} \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \begin{cases} \cos 270^0 = 0 \\ \sin 270^0 = -1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{M \equiv M_1} \; \text{үед} \; \propto = 360^0 \; \text{ба} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} \cos 360^0 = 1 \\ \sin 360^0 = 0 \end{cases}$$



Тригонометрийн зарим өнцөг дээрх утгууд

Градус	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
радион	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\propto$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\propto$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\propto$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$ctg\propto$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0	∞

Тригонометрийн үндсэн адитгалууд:

координатын эх дээр төвтэй нэгж радиустай (r =1) тойргийн тэгшитгэл нь

$y^2 + x^2 = 1$ **ба** $\begin{cases} x = \cos \propto \\ y = \sin \propto \end{cases}$ **байна гэдгээс**

$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$ **болно.**

1. $\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$

2. $tg \propto = \frac{\sin \propto}{\cos \propto}$

3. $ctg \propto = \frac{\cos \propto}{\sin \propto}$

4. $tg \propto \cdot ctg \propto = 1$

5. $\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1 \mid \vdots \cos^2 \propto$

$$\frac{\sin^2 \propto}{\cos^2 \propto} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \propto} \Leftrightarrow tg^2 \propto + 1 = \frac{1}{\cos^2 \propto}$$

6. $\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1 \mid \vdots \sin^2 \propto$

$$\frac{\cos^2\propto}{\sin^2\propto}+1=\frac{1}{\sin^2\propto}\Leftrightarrow ctg^2\propto+1=\frac{1}{\sin^2\propto}$$

Жишээ1

$$\sin\propto=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \cos\propto=\pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\pm\frac{1}{2}$$

$$\cos\propto=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \sin\propto=\pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Жишээ2

$$ctg\propto=\sqrt{3};\ \sin\propto-?$$

$$ctg^2\propto+1=\frac{1}{\sin^2\propto}\quad \sin\propto=\pm\sqrt{\frac{1}{ctg^2\propto+1}}=\pm\frac{1}{2}$$

Тригонометрийн өнцгүүдийн нийлбэр ба ялгаврын томьёо:

1. $\sin(\propto+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\propto$

sin-ийн ***өнцгүүдийн нийлбэрийн томьёо***

2. $\sin(\propto-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\propto$

sin-ийн өнцгүүдийн ялгаврийн томьёо

3. $\cos(\propto + \beta) = \cos \propto \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

cos-ийн өнцгүүдийн нийлбэрийн томьёо

4. $\cos(\propto - \beta) = \cos \propto \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

cos-ийн өнцгүүдийн ялгаврийн томьёо

5. $tg(\propto + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$ **6.** $tg(\propto - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$

7. $ctg(\propto + \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}$

8. $tg(\propto - \beta) = \frac{-ctg\alpha \cdot ctg\beta - 1}{ctg\alpha - ctg\beta} = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta + 1}{ctg\beta - ctg\alpha}$

Жишээ3

$\sin \propto = \frac{1}{2};\ \ \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \sin(\propto + \beta) -$ ол.

$\cos \propto = \sqrt{1 - \sin^2 \propto} = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$$\sin\beta = \sqrt{1-cos^2\beta} = \frac{1}{2};$$

$$\sin(\propto+\beta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Жишээ4

$$\sin\propto = \frac{1}{2}; \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos(\propto+\beta) - \text{ол.}$$

$$\cos\propto = \sqrt{1-sin^2\propto} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin\beta = \sqrt{1-cos^2\beta} = \frac{1}{2};$$

$$\cos(\propto+\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1$$

Жишээ 5

$$\mathrm{tg}\propto = -\frac{5}{12}; \quad \frac{3\pi}{2} < \propto < 2\pi \ ; \ \sin\left(\propto-\frac{\pi}{4}\right) \text{ол}$$

$$\sin\left(\propto-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\propto\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \cos\propto\cdot\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\cos \propto = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\propto}} = \frac{12}{13}$$

$$\sin \propto = \pm\sqrt{1-cos^2 \propto} = -\frac{5}{13}$$

$$\sin\left(\propto -\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{5}{13}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{12}{13}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{17\sqrt{2}}{26}$$

Жишээ 6

$\mathrm{tg} \propto = 2$; $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{4}$; $\mathrm{tg}(\propto +\beta) =$ ол

$$\mathrm{tg}(\propto +\beta) = \frac{\mathrm{tg} \propto + \mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg} \propto \cdot \mathrm{tg}\,\beta} = \frac{2+\frac{1}{4}}{1-2\cdot\frac{1}{4}} = \frac{9}{2}$$

Тригонометрийн давхар өнцгийн томьёо:

1. $\sin 2 \propto = \sin(\propto + \propto) =$

$$= sin\alpha \cdot cos \propto + sin \propto \cdot cos \propto =$$

$$= 2sin \propto \cdot cos \propto$$

$$sin2\propto = 2sin\propto \cdot cos\propto$$

$$2.\ cos2\propto = cos^2\propto - sin^2\propto = \{sin^2\propto = 1 - cos^2\propto\}$$

$$= cos^2\propto - 1 + cos^2\propto = 2cos^2\propto - 1$$

$$=\{cos^2\propto = 1 - sin^2\propto\} = 1 - sin^2\propto - sin^2\propto =$$

$$= 1 - 2sin^2\propto$$

$$cos2\propto = cos^2\propto - sin^2\propto = 2cos^2\propto - 1 = 1 - 2sin^2\propto$$

$$3.\ tg2\propto = \frac{2tg\propto}{1 - tg^2\propto}$$

$$4.\ ctg2\propto = \frac{ctg^2\propto - 1}{2ctg\propto}$$

Жишээ7

$$\sin\propto = \frac{2}{3};\quad \sin 2\propto = \text{ол}$$

$$\cos \propto = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin 2 \propto = 2 \sin \propto \cos \propto = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

Жишээ8

$$\cos \propto = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 2 \propto = \text{ол}$$

$$\cos 2 \propto = 2cos^2 \propto -1 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2}$$

Жишээ 9

$$\sin \propto = \frac{5}{13}; \ \cos \propto = \frac{12}{13}; \quad \text{tg}\, 2 \propto = \text{ол}$$

$$\text{tg}\, 2 \propto = \frac{2\,\text{tg} \propto}{1 - tg^2 \propto} = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}$$

Тригонометрийн хагас өнцгийн томьёо:

$$\cos 2\propto = 1 - 2\sin^2\propto \Leftrightarrow 2\sin^2\propto = 1 - \cos 2\propto \Leftrightarrow$$

$$\sin^2\propto = \frac{1-\cos 2\propto}{2} \Leftrightarrow \sin\propto = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\propto}{2}}$$

Энд $\propto \to \frac{\alpha}{2}$ – аар соливол ($2\alpha \to \alpha$ болно)

$$1.\ \sin\frac{\propto}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\propto}{2}}$$ *sin-ийн хагас өнцгиийн томьёо гарна.*

$$\cos 2\propto = 2\cos^2\propto - 1 \Leftrightarrow 2\cos^2\propto = 1 + \cos 2\propto \Leftrightarrow$$

$$\cos^2\propto = \frac{1+\cos 2\propto}{2} \Leftrightarrow \cos\propto = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\propto}{2}}$$

Энд $\propto \to \frac{\alpha}{2}$ – аар соливол ($2\alpha \to \alpha$ болно)

$$2.\cos\frac{\propto}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\propto}{2}}$$ *cos-ийн хагас өнцгиийн томьёо гарна.*

$$3.\ tg\frac{\propto}{2} = \frac{\sin\frac{\propto}{2}}{\cos\frac{\propto}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\propto}{1+\cos\propto}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\propto)(1+\cos\propto)}{(1+\cos\propto)(1+\cos\propto)}} =$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos^2\propto}{(1+\cos\propto)^2}} = \frac{\sin\propto}{1+\cos\propto}$$ *tg-ийн хагас өнцгиийн томьёо*

$$4.\ ctg\frac{\propto}{2} = \frac{1}{tg\frac{\propto}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\propto}{1-\cos\propto}} = \frac{1+\cos\propto}{\sin\propto}$$ *ctg-ийн хагас өнцгиийн томьёо*

Жишээ 10

$$\cos\propto=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad 0<\propto<\frac{\pi}{2}\ ;\ \sin\frac{\propto}{2}=\text{ол}$$

$$\sin\frac{\propto}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\propto}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Жишээ 11

$$\cos\propto=-\frac{1}{4};\quad \pi<\propto<\frac{3\pi}{2}\ ;\quad \cos\frac{\propto}{2}=\text{ол}$$

$$\cos\frac{\propto}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\propto}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$$

Эмхтгэлийн томьёо:

1. $\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}$ – өнцөг орсон функцын нэр өөрчлөгдөн, $\pi; 2\pi$ – өнцөг орсон функцын нэр өөрчлөгдөхгүй.

2. Эмхтгэгдсэн функцын тэмдэг нь анхны функцын тэмдгээр тодорхойлогдоно.

Энд ашиглагдах зарим томьёо:

мөч	*I*	*II*	*III*	*IV*
$\propto$	$0 < \propto < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \propto < \pi$	$\pi < \propto < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \propto < 2\pi$
$\sin\propto$	+	+	-	-
$\cos\propto$	+	-	-	+
$tg\propto$	+	-	+	-
$ctg\propto$	+	-	+	-

Жич: Энд $0 < \propto < \frac{\pi}{2}$ гэж үзнэ.

Жишээ 12

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \propto\right) = \begin{bmatrix} \frac{3\pi}{2} - \text{тай тул нэр } \textbf{\textit{өөрчлөгдөн}} \\ \frac{3\pi}{2} - \propto \ \textit{III} \text{ мөчид орших тул } - \end{bmatrix} = -\cos\propto$$

$$ctg(\pi - \propto) = \begin{bmatrix} \pi - \text{тай тул нэр } \textbf{\textit{өөрчлөгдөхгүй}} \\ \pi - \propto \ \textit{II} \text{ мөчид орших тул } - \end{bmatrix} = -tg\propto$$

$$\cos 220^0 = \cos(\pi + 40^0) = \begin{bmatrix} \pi - \ \text{нэр } \textbf{\textit{өөрчлөгдөхгүй}} \\ 220^0 \ \textit{III} \text{ мөч } - \end{bmatrix} = -\cos 40^0$$

$$tg 300^0 = tg\left(\frac{3\pi}{2} + 30^0\right) = \begin{bmatrix} \frac{3\pi}{2} - \ \text{нэр } \textbf{\textit{өөрчлөгдөн}} \\ 300^0 \ \textit{IV} \text{ мөч } - \end{bmatrix} = -tg 30^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Мөч	*I*	*II*		*III*		*IV*	
φ	$\frac{\pi}{2} - \propto$	$\frac{\pi}{2} + \propto$	$\pi - \alpha$	$\pi + \propto$	$\frac{3\pi}{2} - \propto$	$\frac{3\pi}{2} + \propto$	$2\pi - \propto$
$\sin\varphi$	$\cos\propto$	$\cos\propto$	$\sin\propto$	$-\sin\propto$	$-\cos\propto$	$-\cos\propto$	$-\sin\propto$
$\cos\varphi$	$\sin\propto$	$-\sin\propto$	$-\cos\propto$	$-\cos\propto$	$-\sin\propto$	$\sin\propto$	$\cos\propto$
$tg\varphi$	$ctg\propto$	$-ctg\propto$	$-tg\propto$	$tg\propto$	$ctg\propto$	$-ctg\propto$	$-tg\propto$
$ctg\varphi$	$tg\propto$	$-tg\propto$	$-ctg\propto$	$ctg\propto$	$tg\propto$	$-tg\propto$	$-ctg\propto$

Жишээ 13

$$\sin(390^{\circ}) = \sin(2\pi + 30^{\circ}) = \sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(-210^{\circ}) = -\sin 210^{\circ} = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 60^{\circ}\right) =$$

$$= -(-\cos 60^{\circ}) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(-300^{\circ}) = \cos 300^{\circ} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 30^{\circ}\right) =$$

$$= \sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$$

Жишээ 14

$$\mathrm{t}g\, 315^{\circ} = \mathrm{tg}\left(2\pi - 45^{\circ}\right) = -\mathrm{tg}\, 45^{\circ} = -1$$

$$\mathrm{tg}(-150^{\circ}) = -\mathrm{tg}\, 150^{\circ} = -\mathrm{tg}(\pi - 30^{\circ}) =$$

$$= -(-\mathrm{tg}\, 30^{\circ}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$